



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



Wykład 11

Powłoki osiowosymetryczne

Teoria błonowa

Powłoki osiowosymetryczne - przykłady



Silosy zbożowe



Zbiorniki wyrównawcze



Powłoki osiowosymetryczne - przykłady



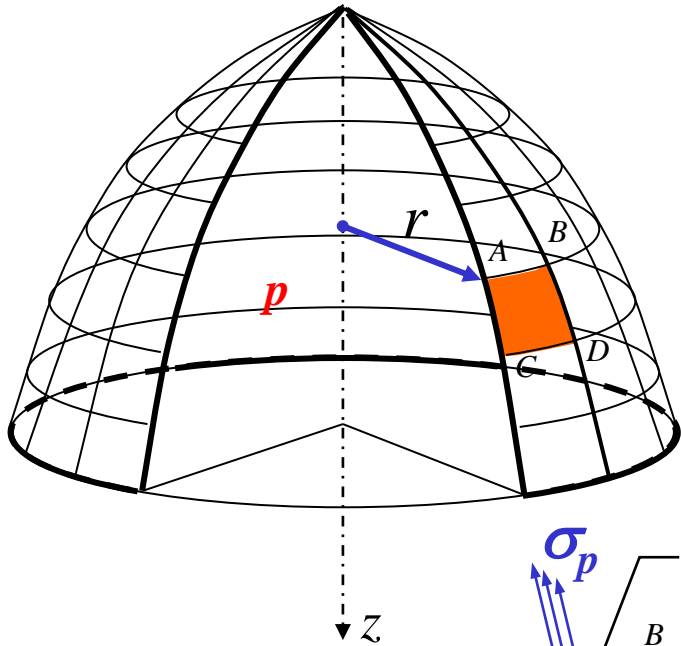
Cysterna kolejowa



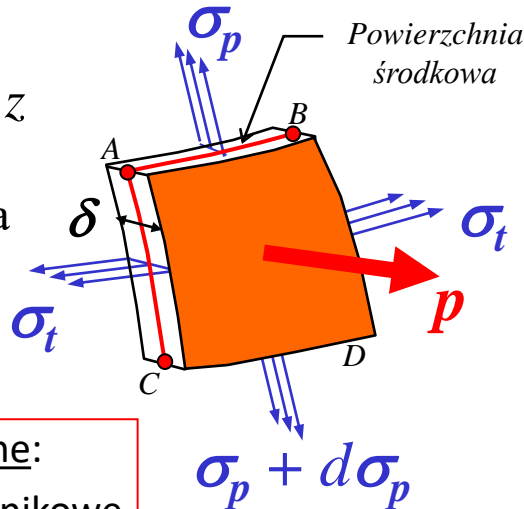
Kompresor olejowy

Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa

Powłoka osiowosymetryczna obciążona od wewnątrz nadciśnieniem p



Element płaszcza

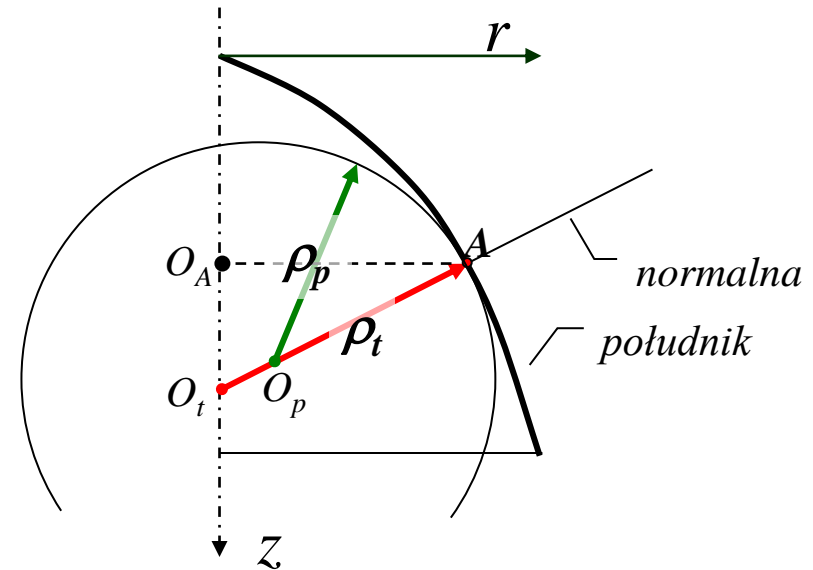


Naprężenia główne:

σ_p – naprężenia południkowe
 σ_t – naprężenia obwodowe

Definicja geometrii:

Kształt południka opisany przez funkcje:
 $r(z)$ – promień wodzący ($r = |O_A A|$)
 $\delta(z)$ – grubość płaszcza powłoki

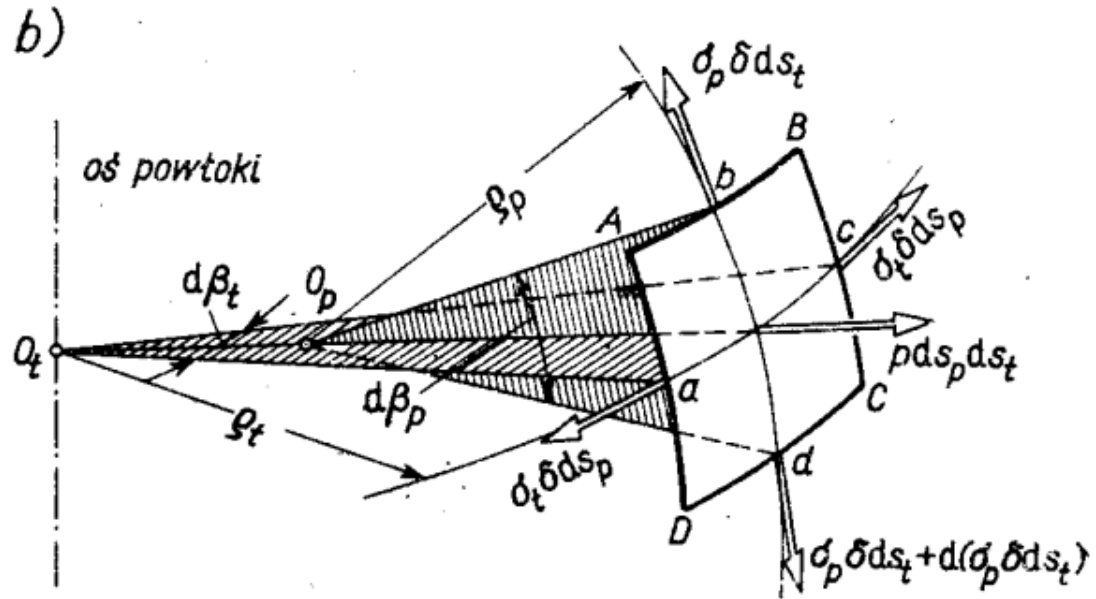
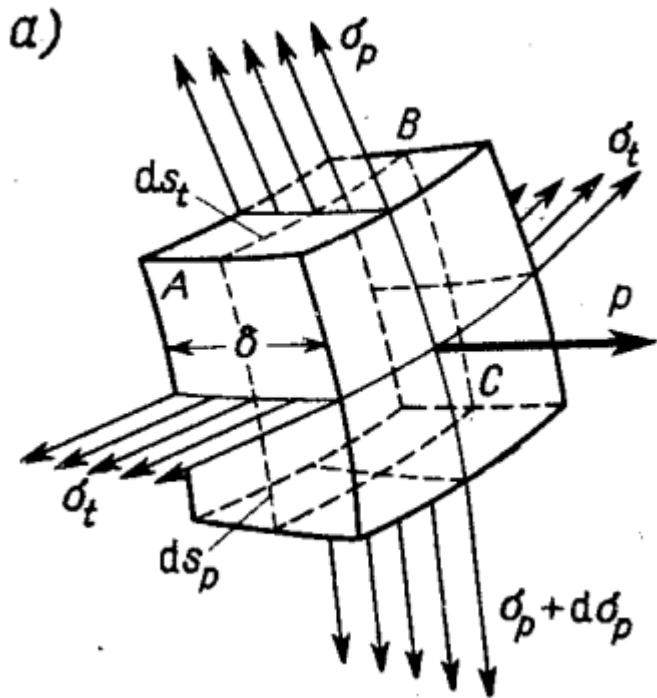


Dla powłoki osiowosymetrycznej mamy dwa główne promienie krzywizny:

ρ_p – promień krzywizny południka ($\rho_p = |O_p A|$)
 ρ_t – promień krzywizny obwodowy ($\rho_t = |O_t A|$)

Zwykle promienie krzywizny są funkcjami położenia punktu A

Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa

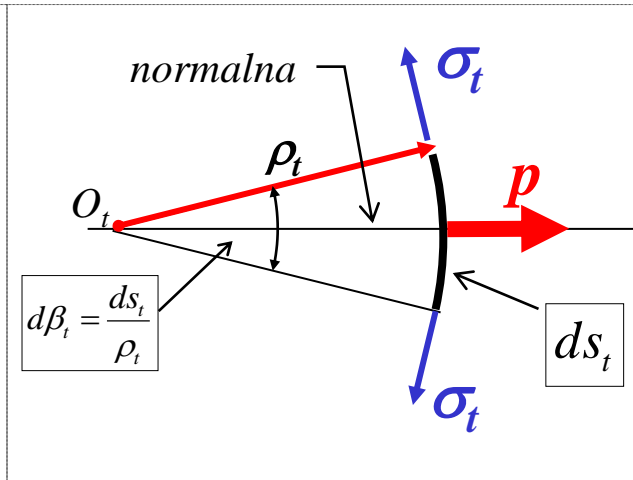
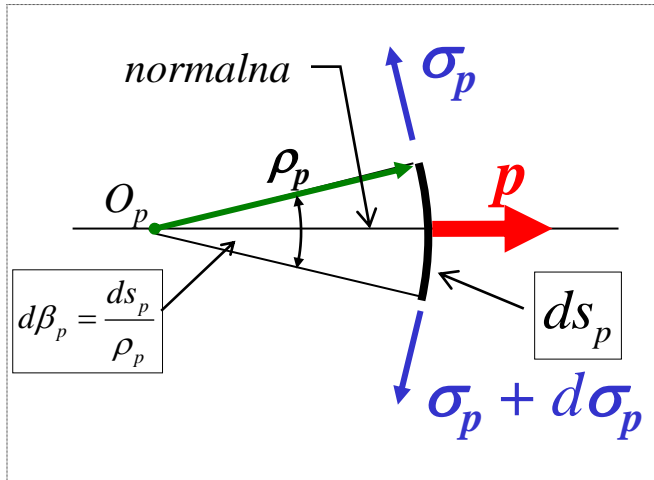
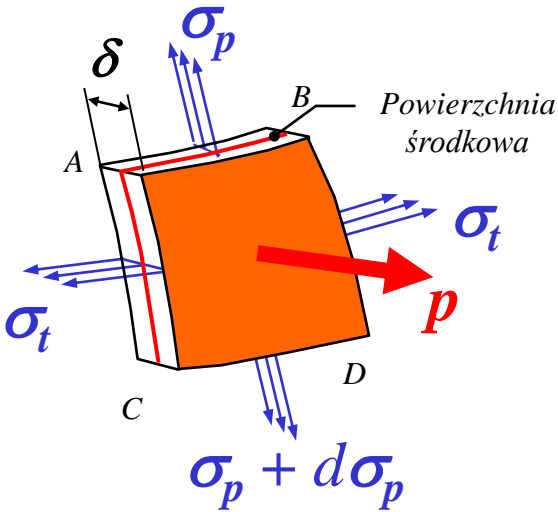


Obraz naprężeń w elemencie powłoki

Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa

Widok z boku:

Widok z góry:



Naprężenia główne:

σ_p – naprężenia południkowe

σ_t – naprężenia obwodowe

I. Równanie równowagi sił na kierunku normalnej:

$$ds_t \cdot ds_p \cdot p - \sigma_p \cdot ds_t \cdot \delta \cdot 2 \sin \frac{d\beta_p}{2} - \sigma_t \cdot ds_p \cdot \delta \cdot 2 \sin \frac{d\beta_t}{2} = 0$$

$$ds_t \cdot ds_p \cdot \left(p - \frac{\sigma_p \delta}{\rho_p} - \frac{\sigma_t \delta}{\rho_t} \right) = 0 \longrightarrow \frac{\sigma_p}{\rho_p} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta}$$

Równanie
Laplace'a

Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa

I. Równanie równowagi sił na kierunku normalnej:

$$\frac{\sigma_p}{\rho_p} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta}$$

Równanie
Laplace'a

II. Równanie równowagi sił na oś powłoki:

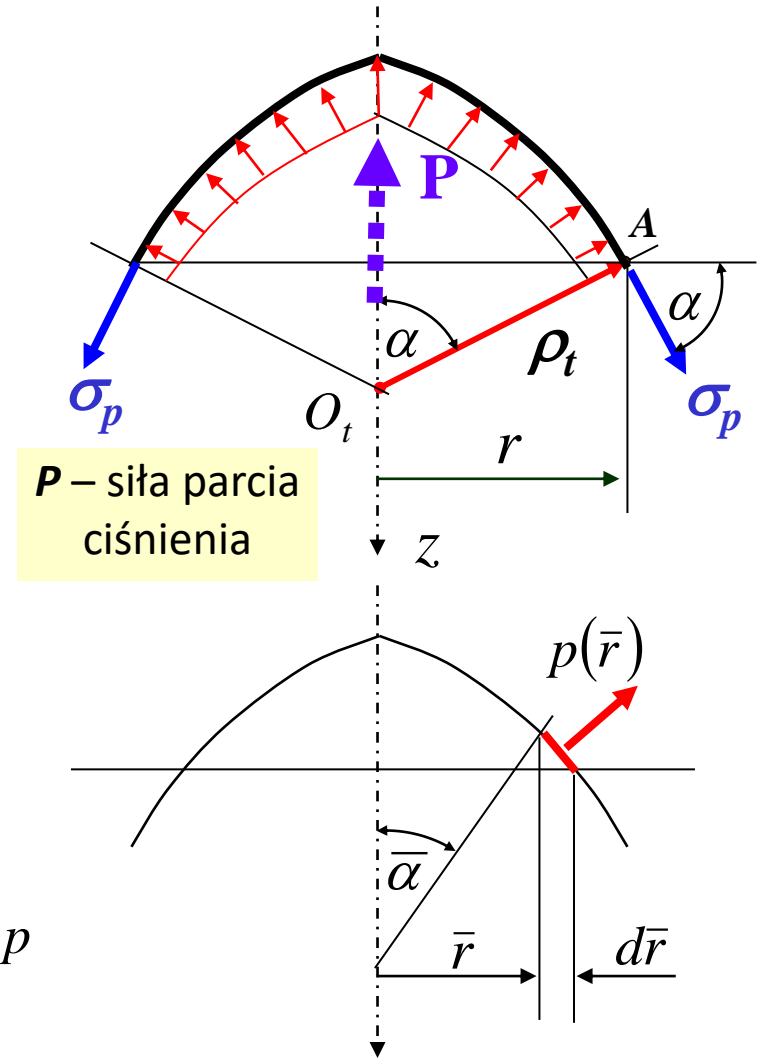
$$2\pi r \sigma_p \delta \sin \alpha - P = 0$$

$$\sigma_p = \frac{P}{2\pi r \delta \sin \alpha}$$

Jeśli ciśnienie zmienia się zgodnie z funkcją $p(r)$,
to siłę parcia wyliczymy z całki:

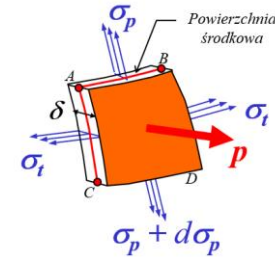
$$P = \int_0^r 2\pi \bar{r} p(\bar{r}) d\bar{r}$$

Jeśli ciśnienie jest stałe, to siła parcia jest: $P = \pi r^2 p$



Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa

Podsumowanie:



Niewiadome:

$$\sigma_p \text{ i } \sigma_t$$

Równania:

$$\frac{\sigma_p}{\rho_p} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta}$$

$$\sigma_p = \frac{P}{2\pi r \delta \sin \alpha}$$

$$P = \int_0^r 2\pi \bar{r} p(\bar{r}) d\bar{r}$$

Zadanie jest statycznie wyznaczalne

Traktujemy stan jako płaski stan naprężenia (**PSN**):

$$\sigma_3 \approx p \ll \sigma_p, \sigma_t$$

Naprężenia zredukowane:

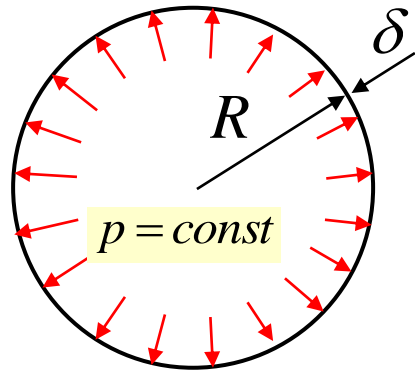
$$\sigma_{red}^H = \sqrt{\sigma_p^2 - \sigma_p \sigma_t + \sigma_t^2}$$

lub

$$\sigma_{red}^T = \max(|\sigma_p|, |\sigma_t|, |\sigma_p - \sigma_t|)$$

Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa

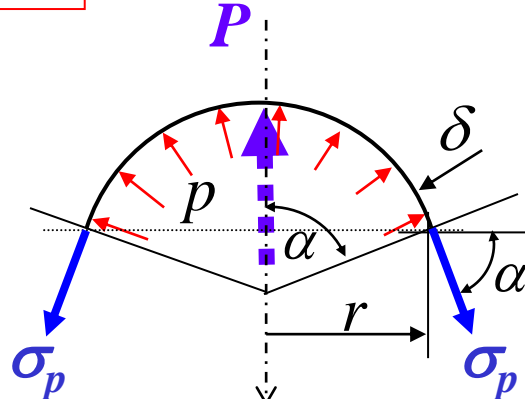
1. Zbiornik kulisty



$$\rho_p = R \quad \rho_t = R$$

1 sposób

Myślowe przecięcie:

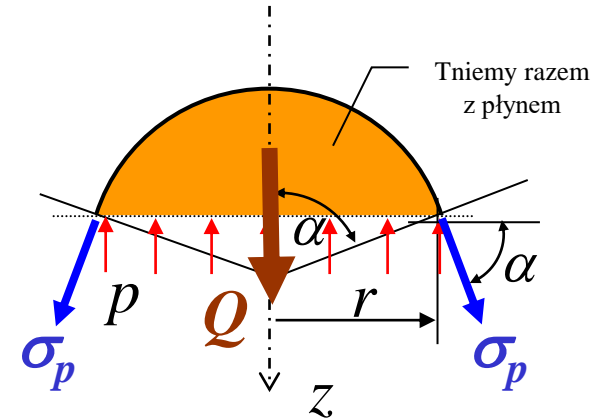


Siła parcia: $P = \int_0^r 2\pi \bar{r} p(\bar{r}) d\bar{r} = \pi r^2 p$

Ciśnienie stałe!

2 sposób

Myślowe przecięcie:



Ciężar płynu: $Q = \gamma \cdot V = 0$

Zał.: **Gaz nieważki!**

1 sposób

Równanie równowagi sił na kierunek z:

$$2\pi r \delta \sigma_p \sin \alpha - P = 0$$

$$\sigma_p = \frac{P}{2\pi r \delta \sin \alpha} = \frac{\pi r^2 p}{2\pi r \delta \sin \alpha} = \frac{pR}{2\delta}$$

2 sposób

Równanie równowagi sił na kierunek z:

$$2\pi r \delta \sigma_p \sin \alpha - \pi r^2 p + Q = 0$$

$$\sigma_p = \frac{\pi r^2 p - Q}{2\pi r \delta \sin \alpha} = \frac{\pi r^2 p - 0}{2\pi r \delta \sin \alpha} = \frac{pR}{2\delta}$$

Równanie Laplace'a:

$$\frac{\sigma_p}{\rho_p} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta}$$



$$\sigma_t = \left(\frac{p}{\delta} - \frac{\sigma_p}{\rho_p} \right) \rho_t = \left(\frac{p}{\delta} - \frac{pR}{2\delta R} \right) R = \frac{pR}{2\delta} = \sigma_p$$

Naprężenia zredukowane:

$$\sigma_{red}^H = \sqrt{\sigma_p^2 - \sigma_p \sigma_t + \sigma_t^2} = \frac{pR}{2\delta}$$

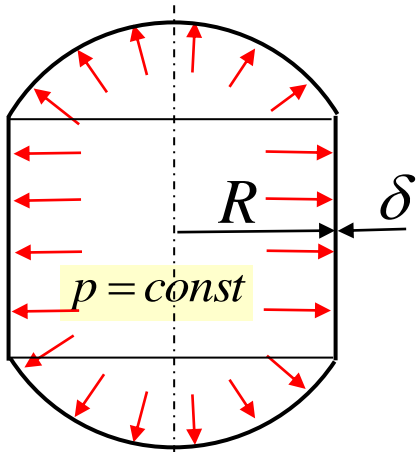
lub

$$\sigma_{red}^T = \max(|\sigma_p|, |\sigma_t|, |\sigma_p - \sigma_t|) = \frac{pR}{2\delta}$$

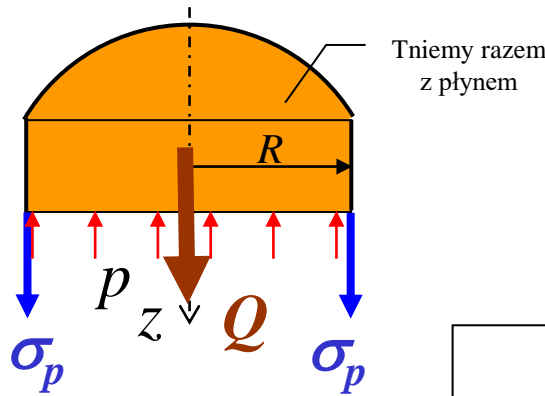
Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa

2. Zbiornik walcowy

Mysłowe przecięcie:



$$\rho_p = \infty \quad \rho_t = R$$



Tniemy razem z płynem

Ciężar płynu:

$$Q = \gamma \cdot V = 0$$

Zał.: Gaz nieważki!

Równanie równowagi sił na kierunek z:

$$2\pi R \delta \sigma_p - \pi R^2 p + Q = 0$$

$$\sigma_p = \frac{\pi R^2 p - Q}{2\pi R \delta} = \frac{\pi R^2 p - 0}{2\pi R \delta} = \frac{pR}{2\delta}$$

Równanie Laplace'a:

Jeśli kontur płaszcza jest linią prostą, to naprężenia obwodowe nie mają związku z naprężeniami południkowymi!

$$\cancel{\frac{\sigma_p}{\rho_p}} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta} \rightarrow \sigma_t = \frac{p}{\delta} \rho_t = \frac{pR}{\delta} = 2\sigma_p$$

Naprężenia zredukowane:

$$\sigma_{red}^H = \sqrt{\sigma_p^2 - \sigma_p \sigma_t + \sigma_t^2}$$

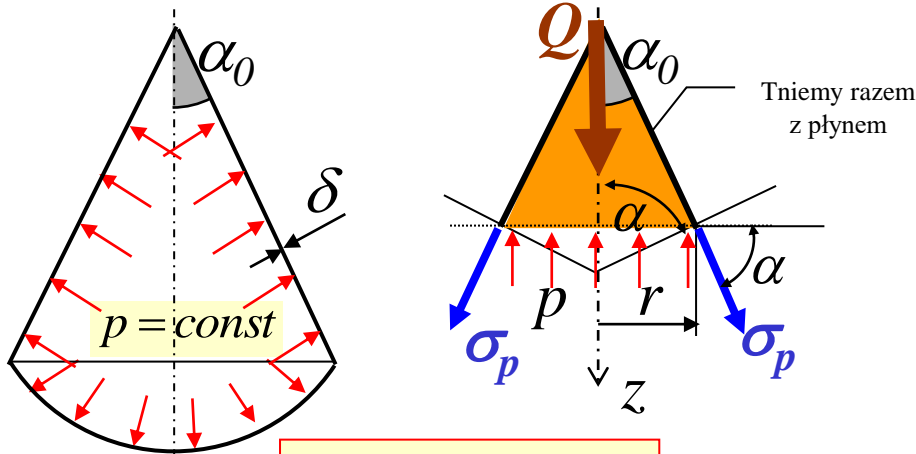
$$\sigma_{red}^H = \sqrt{\sigma_p^2 - 2\sigma_p \sigma_t + (2\sigma_p)^2} = \sigma_p \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3} p R}{2\delta}$$

$$\sigma_{red}^T = \max(|\sigma_p|, |\sigma_t|, |\sigma_p - \sigma_t|)$$

$$\sigma_{red}^T = |\sigma_t| = \frac{pR}{\delta}$$

Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa

3. Zbiornik stożkowy



Ciężar płynu:

$$Q = \gamma \cdot V = 0$$

Zał.: **Gaz nieważki!**

Równanie równowagi sił na kierunku z:

$$2\pi r \delta \sigma_p \sin \alpha - \pi r^2 p + Q = 0$$

$$\rho_p = \infty$$

$$\rho_t = \frac{r}{\sin \alpha} = \frac{r}{\cos \alpha_0}$$

$$\sigma_p = \frac{\pi r^2 p - Q}{2\pi r \delta \sin \alpha} = \frac{\pi r^2 p - 0}{2\pi r \delta \sin \alpha} = \frac{pr}{2\delta \sin \alpha} = \frac{pr}{2\delta \cos \alpha_0}$$

Równanie Laplace'a:

Jeśli kontur płaszcza jest linią prostą, to naprężenia obwodowe nie mają związku z naprężeniami południkowymi!

~~$$\frac{\sigma_p}{\rho_p} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{\delta}$$~~

$$\sigma_t = \frac{p}{\delta} \rho_t = \frac{pr}{\delta \cos \alpha_0} = 2\sigma_p$$

Naprężenia zredukowane:

$$\sigma_{red}^H = \sqrt{\sigma_p^2 - \sigma_p \sigma_t + \sigma_t^2}$$

$$\sigma_{red}^H = \sqrt{\sigma_p^2 - 2\sigma_p \sigma_t + (2\sigma_p)^2} = \sigma_p \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}pr}{2\delta \cos \alpha_0}$$

$$\sigma_{red}^T = \max(|\sigma_p|, |\sigma_t|, |\sigma_p - \sigma_t|)$$

$$\sigma_{red}^T = |\sigma_t| = \frac{pr}{\delta \cos \alpha_0}$$

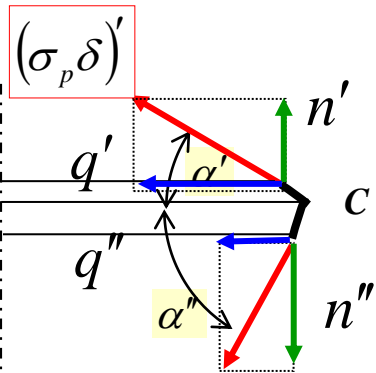
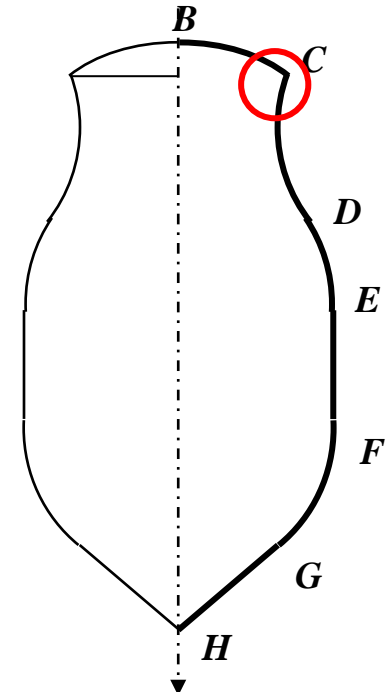
Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa

Punkty szczególne w powłokach:

Przyjmujemy idealny układ naprężeń, tzw. stan błonowy.

W rzeczywistości występują zaburzenia:

I. Załamanie płaszcza (pkt.C) – *nieciągłość I rodzaju*



n' i n'' - te wydatki kasują się (*równowaga*)

$$n' = n'' = \frac{P}{2\pi r_C}$$

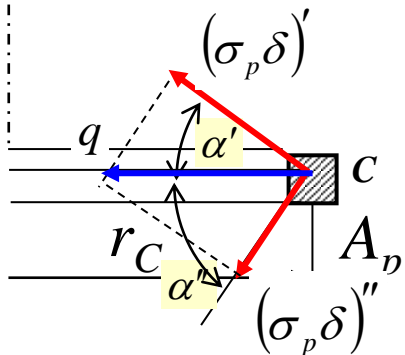
q' i q'' - te wydatki sumują się:

$$q = q' + q'' = n' \operatorname{ctg} \alpha' + n'' \operatorname{ctg} \alpha'' = \frac{P}{2\pi r_C} (\operatorname{ctg} \alpha' + \operatorname{ctg} \alpha'')$$

Potrzebny jest pierścień kołowy o przekroju A_p do przeniesienia wydatku q

Siła rozciągają lub ściskająca pierścienia: $N = q r_C$

Naprężenia w pierścieniu: $\sigma_N = \frac{q r_C}{A_p} = \frac{P}{2\pi A_p} (\operatorname{ctg} \alpha' + \operatorname{ctg} \alpha'')$

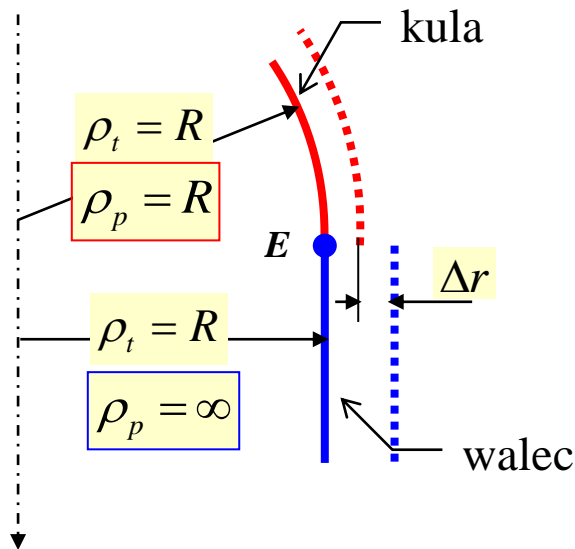


Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa

Punkty szczególne w powłokach:

II. Załamanie „niejawne” płaszczka (pkt.E, F i G) – nieciągłość II rodzaju

Skok krzywizny południkowej powoduje różną „chęć” odkształcenia obwodowego:



$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} (\sigma_t - \nu \sigma_p)$$

Kula:

$$\sigma_t = \frac{pR}{2\delta}$$

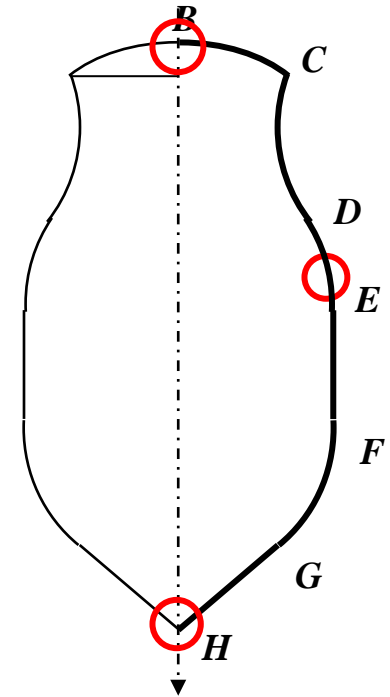
Walec:

$$\sigma_t = \frac{pR}{\delta}$$

$$\sigma_p = \frac{pR}{2\delta}$$

$$\Delta r = \varepsilon_t R$$

Stąd stany zgięciowe!



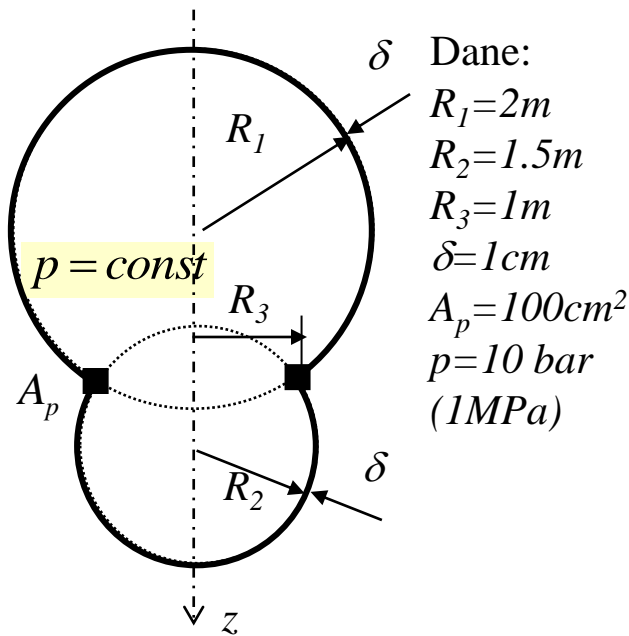
III. Zakończenie płaskie (pkt.B) pracuje jak kula o promieniu $\rho_p = \rho_t$

IV. Zakończenie w szpic (pkt.H) daje składowe zerowe naprężenia: $\sigma_p = \sigma_t = 0$!!!

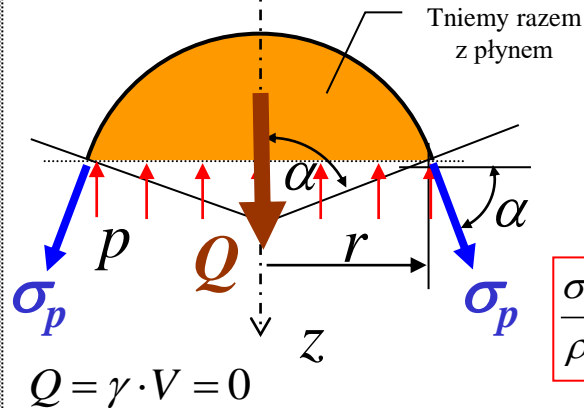
Należy zwracać uwagę na znaki ρ_p i ρ_t !!!

Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa

Zad.1. Zbiornik składa się z dwóch powłok kulistych. Znaleźć stan naprężenia w płaszczu i pierścieniu.



Czasza górna:



Równanie równowagi sił na z:

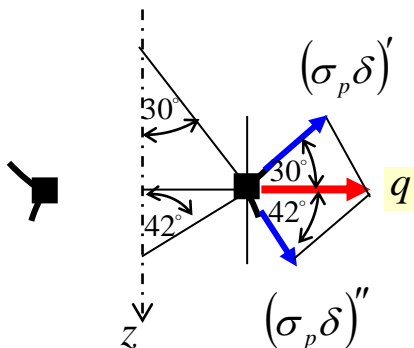
$$2\pi r \delta \sigma_p \sin \alpha - \pi r^2 p + Q = 0$$

$$\sigma_p = \frac{pR_1}{2\delta} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 0.01} = 100MPa$$

$$\frac{\sigma_p + \sigma_t}{\rho_p} = \frac{p}{\delta} \rightarrow \sigma_t = \frac{pR_1}{2\delta} = 100MPa$$

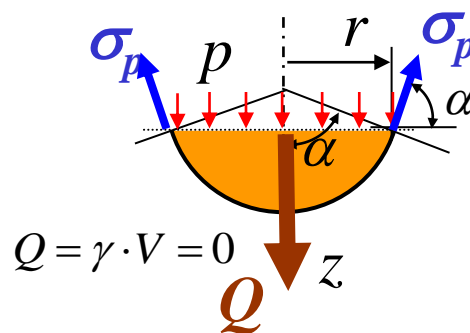
$$\sigma_{red}^H = \sqrt{\sigma_p^2 - \sigma_p \sigma_t + \sigma_t^2} = \frac{pR_1}{2\delta} = 100MPa$$

Pierścień:



$$q = (\sigma_p \delta)' \cos 30^\circ + (\sigma_p \delta)'' \cos 42^\circ$$

Czasza dolna:



$$-2\pi r \delta \sigma_p \sin \alpha + \pi r^2 p + Q = 0$$

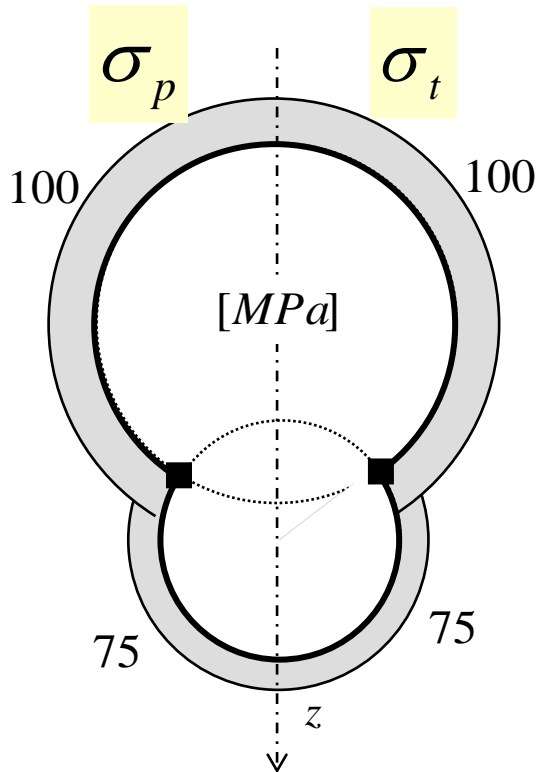
$$\sigma_p = \frac{pR_2}{2\delta} = \frac{1 \cdot 1.5}{2 \cdot 0.01} = 75MPa$$

$$\frac{\sigma_p + \sigma_t}{\rho_p} = \frac{p}{\delta} \rightarrow \sigma_t = \frac{pR_2}{2\delta} = 75MPa$$

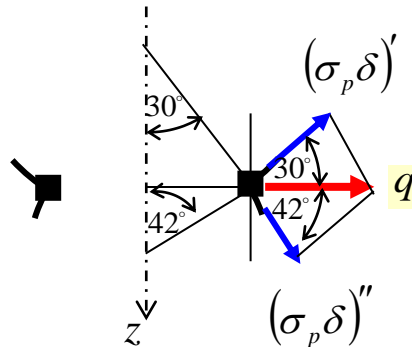
$$\sigma_{red}^H = \sqrt{\sigma_p^2 - \sigma_p \sigma_t + \sigma_t^2} = \frac{pR_2}{2\delta} = 75MPa$$

Powłoki osiowosymetryczne - Teoria błonowa

Rozkłady naprężeń:



Pierścień:



Wydatek obciążający pierścień:

$$q = (\sigma_p \delta)' \cos 30^\circ + (\sigma_p \delta)'' \cos 42^\circ$$

$$q = \frac{pR_1}{2\delta} \cdot \delta \cos 30^\circ + \frac{pR_2}{2\delta} \cdot \delta \cos 42^\circ$$

$$q = \frac{p}{2} (R_1 \cos 30^\circ + R_2 \cos 42^\circ)$$

$$q = \frac{10^6}{2} (2 \cdot \cos 30^\circ + 1.5 \cdot \cos 42^\circ) = 1.423 \cdot 10^6 \frac{N}{m}$$

Siła w pierścieniu:

$$N = q \cdot R_3 = 1.423 \cdot 10^6 \frac{N}{m} \cdot 1m = 1.423 MN$$

Naprężenia rozciągające pierścień:

$$\sigma_N = \frac{N}{A_p} = \frac{1.423 \cdot 10^6 N}{100 \cdot 10^2 mm^2} = 142 MPa$$